

# Облікова картка дисертації

## I. Загальні відомості

**Державний обліковий номер:** 0824U003684

**Особливі позначки:** відкрита

**Дата реєстрації:** 24-12-2024

**Статус:** Наказ про видачу диплома



**Реквізити наказу МОН / наказу закладу:** Наказ директора Інституту прикладної математики і механіки НАН України від 18.03.2025 №22-Од "Про видачу диплома доктора філософії та додатка до нього європейського зразка Зозулі Є.С."

## II. Відомості про здобувача

**Власне Прізвище Ім'я По-батькові:**

1. Зозуля Євген Сергійович

2. Yevhen S. Zozulia

**Кваліфікація:**

**Ідентифікатор ORCID ID:** 0000-0003-4087-7547

**Вид дисертації:** доктор філософії

**Аспірантура/Докторантура:** так

**Шифр наукової спеціальності:** 111

**Назва наукової спеціальності:** Математика

**Галузь / галузі знань:** математика та статистика

**Освітньо-наукова програма зі спеціальності:** 27532 Диференціальні рівняння та теорія функцій

**Дата захисту:** 26-02-2025

**Спеціальність за освітою:** Математика та фізика

**Місце роботи здобувача:** Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України

**Код за ЄДРПОУ:** 05420675

**Місцезнаходження:** вул. Батюка, буд. 19, Слов'янськ, Краматорський р-н., 84116, Україна

**Форма власності:** Державна

**Сфера управління:** Національна академія наук України

**Ідентифікатор ROR:**

### **III. Відомості про організацію, де відбувся захист**

**Шифр спеціалізованої вченої ради (разової спеціалізованої вченої ради):** PhD 7443

**Повне найменування юридичної особи:** Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України

**Код за ЄДРПОУ:** 05420675

**Місцезнаходження:** вул. Батюка, буд. 19, Слов'янськ, Краматорський р-н., 84116, Україна

**Форма власності:** Державна

**Сфера управління:** Національна академія наук України

**Ідентифікатор ROR:**

### **IV. Відомості про підприємство, установу, організацію, в якій було виконано дисертацію**

**Повне найменування юридичної особи:** Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України

**Код за ЄДРПОУ:** 05420675

**Місцезнаходження:** вул. Батюка, буд. 19, Слов'янськ, Краматорський р-н., 84116, Україна

**Форма власності:** Державна

**Сфера управління:** Національна академія наук України

**Ідентифікатор ROR:**

### **V. Відомості про дисертацію**

**Мова дисертації:** Українська

**Коди тематичних рубрик:** 27.31, 27.31.21

**Тема дисертації:**

1. Якісні властивості розв'язків вироджених еліптичних і параболічних рівнянь з сингулярними молодшими членами
2. Qualitative properties of solutions of degenerate elliptic and parabolic equations with singular lower terms

**Реферат:**

1. Задачі, пов'язані з дослідженням властивостей розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними, привертають увагу багатьох авторів протягом останніх кількох десятиліть. У нашому дисертаційному дослідженні ми зосередились на нелінійних рівняннях дивергентного типу, що містять нелінійність у головній частині рівняння. Зокрема, дана дисертаційна робота присвячена дослідженню якісних властивостей розв'язків трьох параболічних рівнянь, а саме: - рівняння пористого середовища з ваговими коефіцієнтами, які є представниками класів Маккенхаупта, та із сингулярним молодшим членом; - рівняння з  $r$ -лапласіаном, що містить вагові коефіцієнти класів Маккенхаупта та сингулярний молодший член; - рівняння пористого середовища з ваговим абсорбційним членом. В представленій роботі для перших двох рівнянь особливу увагу зосереджено на питаннях поточної оцінки, неперервності та нерівності

Гарнака, а для третього рівняння на отриманні оцінок типу Келлера–Оссермана. Дисертаційна робота складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел і додатку зі списком публікацій автора за темою дисертації. У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, завдання, об'єкт та предмет дослідження, вказано методи дослідження, сформульовано наукову новизну, теоретичне та про публікації, особистий внесок здобувача, апробацію результатів дисертації та зв'язок з науково-дослідними роботами. Перший розділ присвячений огляду та аналізу літератури, історичному розвитку та сучасному стану досліджуваної проблеми. Наведено результати, що стали вже класичними і результати, отримані останнім часом. У другому розділі досліджено узагальнені розв'язки рівняння пористого середовища з ваговими коефіцієнтами та сингулярним молодшим членом. Для такого рівняння доведено нерівність Качіополлі. Визначено та введено ваговий параболічний потенціал Рісса для правої частини рівняння, що надало можливість отримати поточкові нижню і верхню оцінки слабких розв'язків. Причому доведення проводилось уніфіковано, стосовно виродженого та сингулярного випадків. У третьому розділі наведено дослідження узагальнених розв'язків рівняння з  $p$ -лапласіаном. Для слабких розв'язків такого рівняння доведено нерівність Качіополлі. Визначено та вивчено ваговий параболічний потенціал для Вольфа для правої частини рівняння, що надало можливість отримати поточкову верхню оцінку слабких розв'язків для виродженого випадку. У четвертому розділі розглянуто якісні властивості слабких розв'язків вагового рівняння пористого середовища з ваговим абсорбційним членом. Головними результатами розділу є теорема 4.1, де доведено виконання нерівності Гарнака для невід'ємних розв'язків рівняння, теорема 4.2, у якій отримані апріорні оцінки типу Келлера–Оссермана, теорема 4.3, що є лемою типу Де Джорджі для рівняння пористого середовища з абсорбцією. Наша стратегія доведення основних тверджень є подібною до стратегії Ді Бенедетто. Однак, через структуру досліджуваних нами рівнянь, ітераційну техніку типу Де Джорджі використовувати не можна. Натомість, в дисертаційному дослідженні ми запропонували ітераційний метод Кіпелайнен–Мали, адаптований до рівнянь пористого середовища та еволюційних рівнянь з  $p$ -лапласіаном. Крім того, для вирішення поставлених завдань у дисертаційній роботі застосовані: метод локальних енергетичних оцінок, метод внутрішнього масштабування Ді Бенедетто, метод точних поточкових оцінок розв'язків типу «нелінійного потенціалу» який був розвинутий І.І. Скрипніком для параболічних рівнянь.

2. Problems related to the study of the properties of solutions of partial differential equations have attracted the attention of many authors over the past few decades. In our dissertation research, we focused on nonlinear equations of the divergent type, containing nonlinearity in the main part of the equation. In particular, this dissertation work is devoted to the study of the qualitative properties of solutions of three parabolic equations, namely: -equation of a porous medium with weight coefficients that are representative functions of Mackenhaupt classes and a singular lower term; -equation with  $p$ -laplacian with weight coefficients of Mackenhaupt classes and a singular lower term; -equation of a porous medium with a weighted absorption term. In the presented work, for the first two equations, special attention is focused on the issues of pointwise estimation, continuity and Harnack inequality, and for the third equation, on obtaining estimates of the Keller–Osserman type. The dissertation consists of abstracts in Ukrainian and English, an introduction, four chapters, general conclusions, a list of sources used, and an appendix with a list of the author's publications on the topic of the dissertation. The introduction substantiates the relevance of the dissertation topic, defines the goal, objectives, object and subject of the research, indicates the research methods, formulates the scientific novelty, theoretical and practical significance of the results obtained. Information is provided about publications, the applicant's personal contribution, approval of the dissertation results, and the connection with scientific research works. The first chapter is devoted to a review and analysis of the literature, historical development, and the current state of the problem. Results that have become classical and results obtained recently are presented. In the second section generalized solutions of the equation of a porous medium with weight coefficients and a singular lower term are investigated. For such an equation with the corresponding structural conditions, the Caciopoli inequality is proved in terms of the integral identity. The weighted parabolic Riesz potential of the right-hand side of the equation is defined and introduced, which made it possible to obtain pointwise lower and upper estimates of the solutions. Moreover, the proof was

carried out in a unified manner, simultaneously for the degenerate and singular cases. The third section presents a study of generalized solutions of the weighted  $p$ -laplacian equation. For such an equation with the corresponding structural conditions in terms of the integral identity, the Caciopoli inequality is proved. The weighted parabolic Wolff potential of the right-hand side of the equation is defined and introduced, which makes it possible to obtain a pointwise upper estimate of the solutions for the degenerate case. The fourth section considers the qualitative properties of solutions to the weight equation of a porous medium with a weight absorption term. The main results of the section are Theorem 4.1, which proves the fulfillment of the Harnack inequality for non-negative solutions of the equation, Theorem 4.2, in which a priori estimates of the Keller-Osserman type are obtained, Theorem 4.3, which is a De Giorgi type lemma for the equation of a porous medium with absorption. Our strategy for proving the main statements was similar to Di Benedetto's strategy, however, due to the structural conditions of the structure, the De Giorgi-type iterative technique cannot be used. Instead, in the dissertation research we proposed an adapted Kilpelainen-Maly iterative method for equations of porous media and evolution equations with  $p$ -laplacian. In addition, to solve the problems set in the dissertation work, the following methods were used: the method of local energy estimates, the method of Di Benedetto's internal scaling, the method of exact pointwise estimates of solutions of the type «nonlinear potential», which was developed by I.I. Skrypnik for parabolic equations.

**Державний реєстраційний номер ДіР:** 0116U002032, 0119U103543, 0120U100178, 0122U000594

**Пріоритетний напрям розвитку науки і техніки:** Фундаментальні наукові дослідження з найбільш важливих проблем розвитку науково-технічного, соціально-економічного, суспільно-політичного, людського потенціалу для забезпечення конкурентоспроможності України у світі та сталого розвитку суспільства і держави

**Стратегічний пріоритетний напрям інноваційної діяльності:** Не застосовується

**Підсумки дослідження:** Нове вирішення актуального наукового завдання

**Публікації:**

- Zozulia Y., Pointwise estimates of solutions to weighted porous medium and fast diffusion equations via weighted Riesz potentials, *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, 2020, V. 248(2), P. 233 - 254. DOI: 10.1007/s10958-020-04872-4
- Zozulia Y., On the Continuity of Solutions of the Equations of a Porous Medium and the Fast Diffusion with Weighted and Singular Lower-Order Terms, *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, 2021, V. 256(6), P. 803-830. DOI: 10.1007/s10958-021-05462-8
- Zozulia Y., Harnack's inequality for porous medium equation with singular absorption term, *Annali dell'Universita di Ferrara*, 2023, V. 69(2), P. 375-400. DOI: 10.1007/s11565-022-00438-1
- Bychkov A.S., Hadzhy O.V., Zozulia Y.S., On the generalized weak Harnack inequality for non-negative super-solutions of quasilinear elliptic equations with absorption term, *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, 2024, V. 21(1), P. 13-27. DOI: 10.1007/s10958-024-07165-2
- Зозуля Є., Неперервність та нерівність Гарнака для розв'язків вагового параболического рівняння з  $p$ -лапласіаном, яке містить сингулярний молодший член, *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*, 2021, Т. 35, № 1, С. 37-56. DOI: 10.37069/1683-4720-2021-35-4
- Zozulia Y., Pointwise estimates of solutions to weighted parabolic  $p$ -Laplacian equation via Wolff potential, *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*, 2022, Т. 36, № 2, С. 72-90. DOI: 10.37069/1683-4720-2022-36-07
- Скрипник І.І., Зозуля Є.С., Поточкові оцінки розв'язків рівнянь зваженого пористого середовища та швидкої дифузії з використанням вагових потенціалів Рісса, *Буковинський математичний журнал* 2023, Т.11, №2, С. 254-256. DOI: 10.31861/bmj2023.02.25

**Наукова (науково-технічна) продукція:** методи, теорії, гіпотези

**Соціально-економічна спрямованість:** підвищення продуктивності праці

**Охоронні документи на ОПВ:**

**Впровадження результатів дисертації:** Планується до впровадження

**Зв'язок з науковими темами:**

## **VI. Відомості про наукового керівника/керівників (консультанта)**

**Власне Прізвище Ім'я По-батькові:**

1. Скрипник Ігор Ігорович

2. Skrypnik Igor I.

**Кваліфікація:** д. ф.-м. н., доц., академік НАН України, 01.01.02

**Ідентифікатор ORCID ID:** Не застосовується

**Додаткова інформація:**

**Повне найменування юридичної особи:** Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України

**Код за ЄДРПОУ:** 05420675

**Місцезнаходження:** вул. Батюка, буд. 19, Слов'янськ, Краматорський р-н., 84116, Україна

**Форма власності:** Державна

**Сфера управління:** Національна академія наук України

**Ідентифікатор ROR:**

## **VII. Відомості про офіційних опонентів та рецензентів**

**Офіційні опоненти**

**Власне Прізвище Ім'я По-батькові:**

1. Чайченко Станіслав Олегович

2. Stanislav O. Chaichenko

**Кваліфікація:** д. ф.-м. н., професор, 01.01.01

**Ідентифікатор ORCID ID:** 0000-0002-2724-8749

**Додаткова інформація:**

**Повне найменування юридичної особи:** Державний вищий навчальний заклад "Донбаський державний педагогічний університет"

**Код за ЄДРПОУ:** 38177113

**Місцезнаходження:** Вул. Генерала Батюка, будинок 19, Слов'янськ, Краматорський р-н., 84116, Україна

**Форма власності:** Державна

**Сфера управління:** Міністерство освіти і науки України

## Ідентифікатор ROR:

### Власне Прізвище Ім'я По-батькові:

1. Бокало Микола Михайлович
2. Mykola M. Bokalo

**Кваліфікація:** д. ф.-м. н., професор, 01.01.02

**Ідентифікатор ORCID ID:** 0000-0002-2533-0917

**Додаткова інформація:** <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=25025664800>

**Повне найменування юридичної особи:** Львівський національний університет імені Івана Франка

**Код за ЄДРПОУ:** 02070987

**Місцезнаходження:** вул. Університетська, буд. 1, Львів, 79000, Україна

**Форма власності:** Державна

**Сфера управління:** Міністерство освіти і науки України

## Ідентифікатор ROR:

### Рецензенти

### Власне Прізвище Ім'я По-батькові:

1. Несмелова Ольга Володимирівна
2. Olga V. Nesmelova

**Кваліфікація:** д. ф.-м. н., доцент, 01.01.02

**Ідентифікатор ORCID ID:** 0000-0003-2542-5980

**Додаткова інформація:**

**Повне найменування юридичної особи:** Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України

**Код за ЄДРПОУ:** 05420675

**Місцезнаходження:** вул. Батюка, буд. 19, Слов'янськ, Краматорський р-н., 84116, Україна

**Форма власності:** Державна

**Сфера управління:** Національна академія наук України

## Ідентифікатор ROR:

### Власне Прізвище Ім'я По-батькові:

1. Савченко Марія Олексіївна
2. Savchenko Mariia O.

**Кваліфікація:** к. ф.-м. н., 01.01.02

**Ідентифікатор ORCID ID:** Не застосовується

**Додаткова інформація:**

**Повне найменування юридичної особи:** Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України

**Код за ЄДРПОУ:** 05420675

**Місцезнаходження:** вул. Батюка, буд. 19, Слов'янськ, Краматорський р-н., 84116, Україна

**Форма власності:** Державна

**Сфера управління:** Національна академія наук України

**Ідентифікатор ROR:**

## VIII. Заключні відомості

**Власне Прізвище Ім'я По-батькові  
голови ради**

Рязанов Володимир Ілліч

**Власне Прізвище Ім'я По-батькові  
головуючого на засіданні**

Рязанов Володимир Ілліч

**Відповідальний за підготовку  
облікових документів**

Сапунов Сергій Валерійович

**Реєстратор**

УкрІНТЕІ

**Керівник відділу УкрІНТЕІ, що є  
відповідальним за реєстрацію наукової  
діяльності**



Юрченко Тетяна Анатоліївна